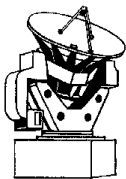


Étude Analytique et Numérique du Développement d'Instabilités MHD dans des Structures d'Accrétion-Éjection Magnétisées

Evyy Kersalé

Sous la direction de Guy Pelletier et de Pierre-Yves Longaretti



OBSERVATOIRE DES SCIENCES
DE L'UNIVERS DE GRENOBLE

Laboratoire d'Astrophysique



SHERPAS

Plan de l'Exposé

I. Contexte de l'Étude

- Jets Magnétisés
- Puissance de l'Accrétion
- Structures MHD

II. Instabilités MHD de Pression

- Présentation
- Équations d'Évolution
- Mécanisme Physique
- Application aux Jets

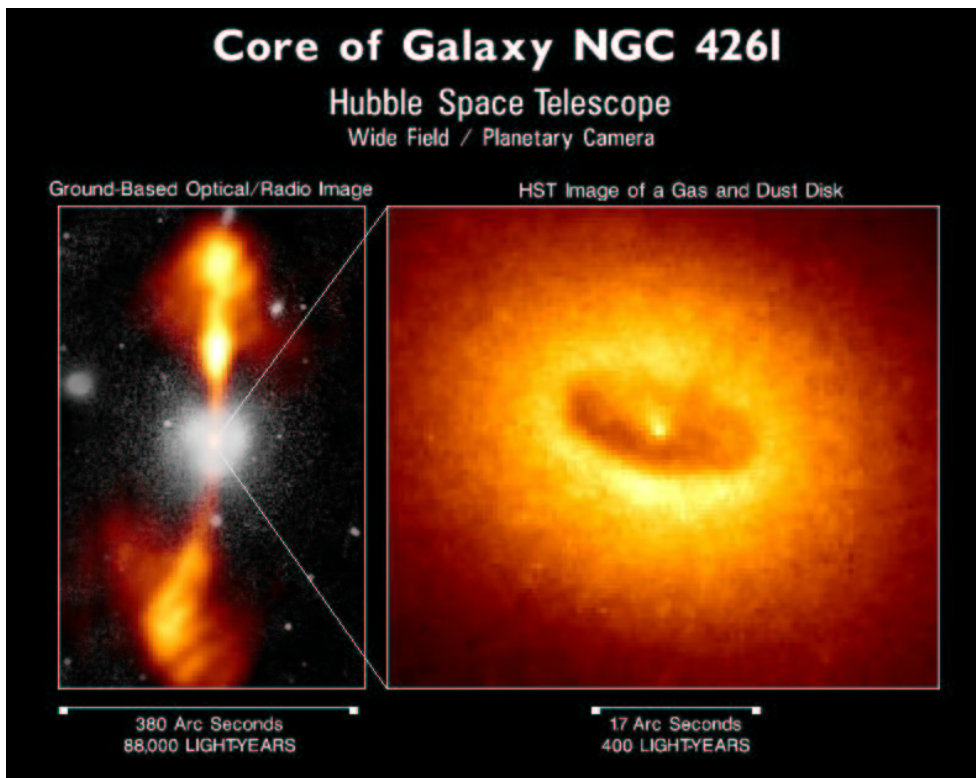
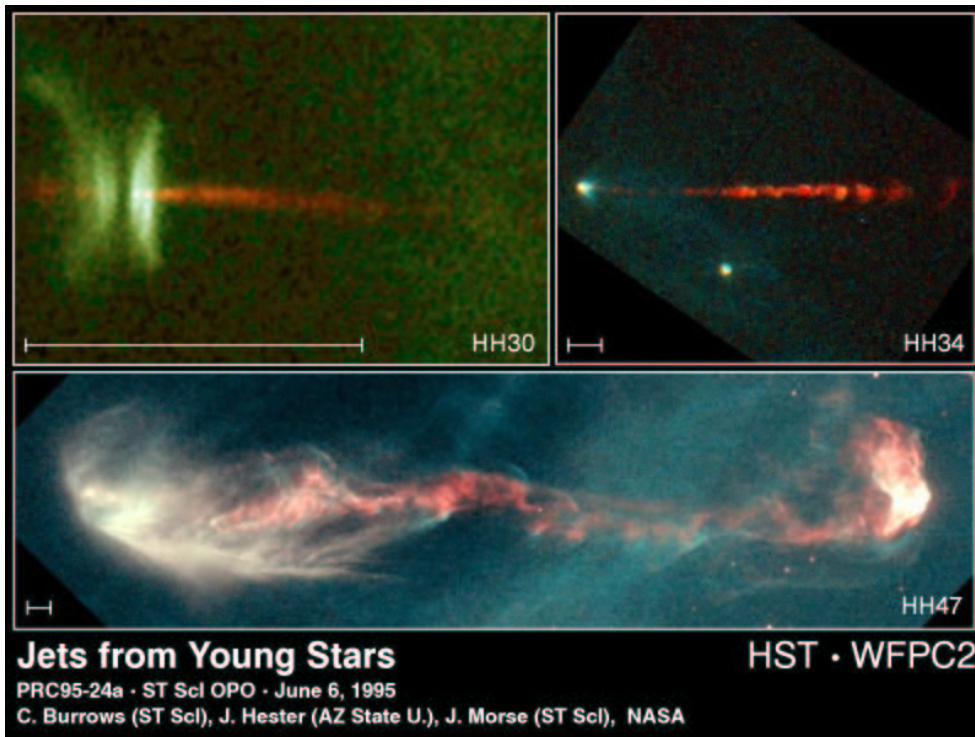
III. MHD Numérique

- Problématique
- Schémas Implémentés
- Dissipation Numérique
- Tests du Code

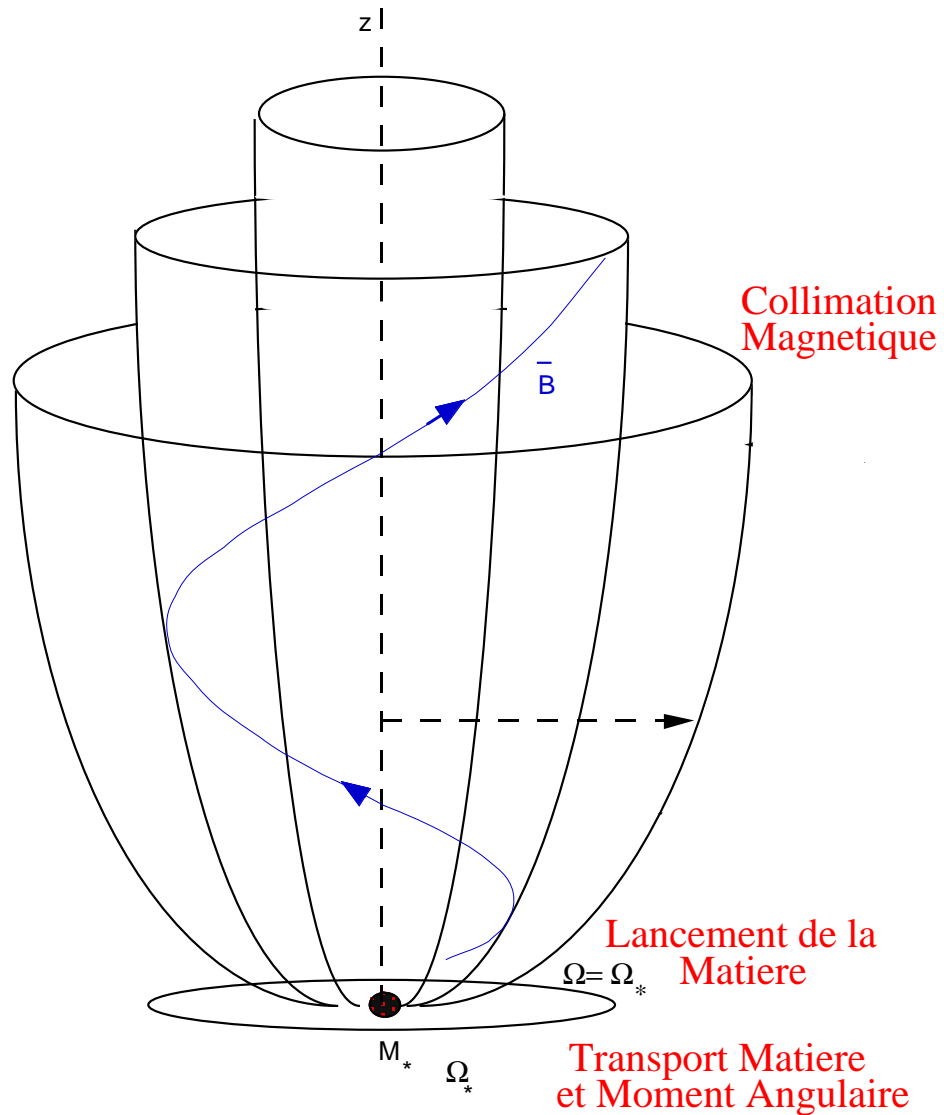
IV. Conclusion & Perspectives

Contexte de l'Étude

Jets Galactiques et Extragalactiques



Structures d'Accrétion-Éjection Magnétisées



MHD Jet

Magnétohydrodynamique

Plasma $\left\{ \begin{array}{l} \text{complètement ionisé} \\ \text{champ magnétique} \\ \text{non résistif} \end{array} \right.$

Continuité: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \vec{v}$

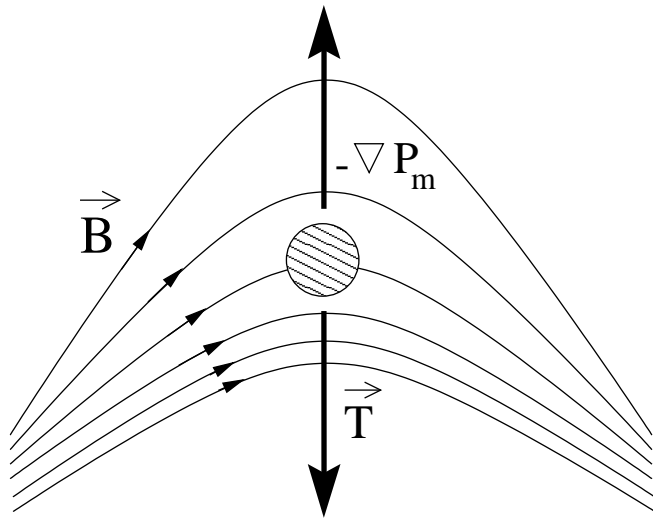
Induction: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$

État: $P \propto \rho^\gamma$

Mouvement: $\frac{d\rho \vec{v}}{dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{\mathcal{F}}$

Gel: matière et champ magnétique étroitement couplés

Force de Laplace : $\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla P_m + \vec{T}$



– Pression : $P_m = \frac{B^2}{2\mu}$

– Tension : $\vec{T} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B}$

Échelles caractéristiques :

$\vec{\mathcal{K}}_\rho$: densité — $\vec{\mathcal{K}}_b$: champ magnétique — $\vec{\mathcal{K}}_c$: courbure

Motivations des Travaux

- Mécanisme de **chauffage du cœur des jets**?
- Production de **surluminosités dans les jets** : avalanche?
- **Disques** magnétisés avec $\beta = 1$: quel processus instable?
- **Éjection sporadique** de matière : avalanche?

Instabilités MHD de Pression

Principe d'Énergie

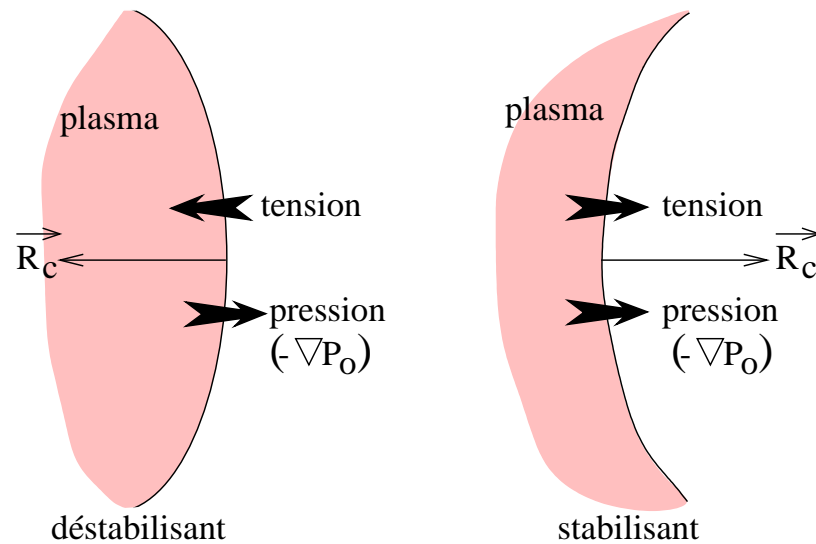
- Croissance d'une perturbation infinitésimale \Rightarrow **instabilité**
- Énergie potentielle convertie en énergie cinétique: $\delta W < 0$

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P d^3 \vec{r} \left[\underbrace{\frac{|\delta \vec{B}_\perp|^2}{\mu}}_{\text{Alfvén}} + \underbrace{\frac{B_o}{2\mu} |\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp + 2 \vec{\xi}_\perp \cdot \vec{\mathcal{K}}_c|^2}_{\text{magnéto-sonore}} + \underbrace{\gamma P_o |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2}_{\text{sonore}} \right. \\ \left. - \underbrace{2 \left(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla P_o \right) \left(\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \vec{\xi}_\perp^* \right)}_{\text{interchange - ballooning}} - \underbrace{j_{o\parallel} \left(\vec{\xi}_\perp^* \times \vec{e}_\parallel \right) \cdot \delta \vec{B}_\perp}_{\text{kink}} \right] \quad (\text{Furth } et \text{ al, } 1965)$$

Instabilité MHD : champ magnétique \equiv source d'énergie

Instabilités MHD Linéaires non Résistives

Moteur $\left\{ \begin{array}{l} \text{Courant parallèle } (L_o k_{\perp} \sim 1) \\ \text{Pression thermique } (L_o k_{\perp} \gg 1) \end{array} \right. \begin{array}{l} \implies \text{Kink (reste effectif dans la limite force-free)} \\ \implies \text{Interchange et Ballooning} \end{array}$



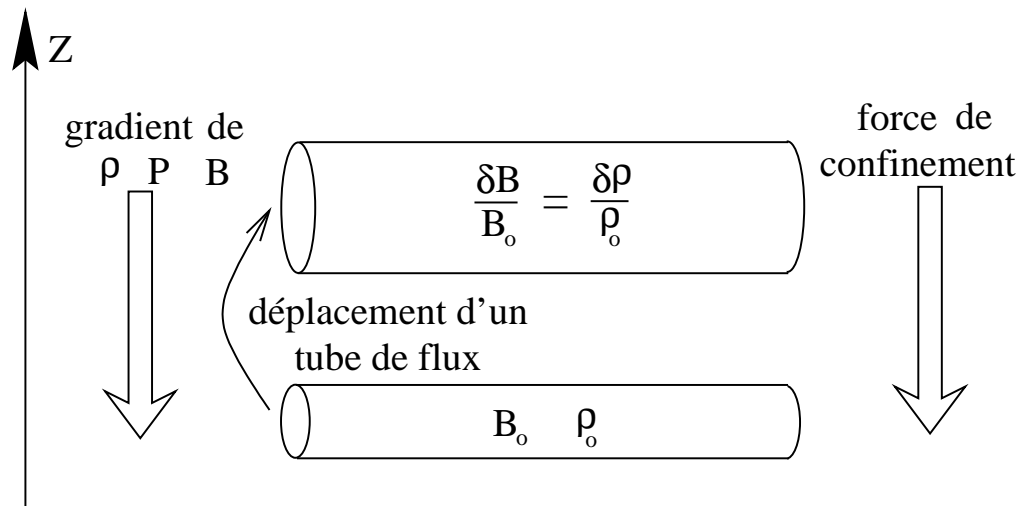
Instabilité de Pression

$$\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \nabla P_o < 0 \Rightarrow \text{stabilisant}$$

$$\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \nabla P_o > 0 \Rightarrow \text{déstabilisant}$$

Principe de l'Interchange

Échange de deux éléments fluides \Rightarrow l'énergie potentielle diminue \Rightarrow instabilité
 Archétype : instabilité de Rayleigh-Taylor



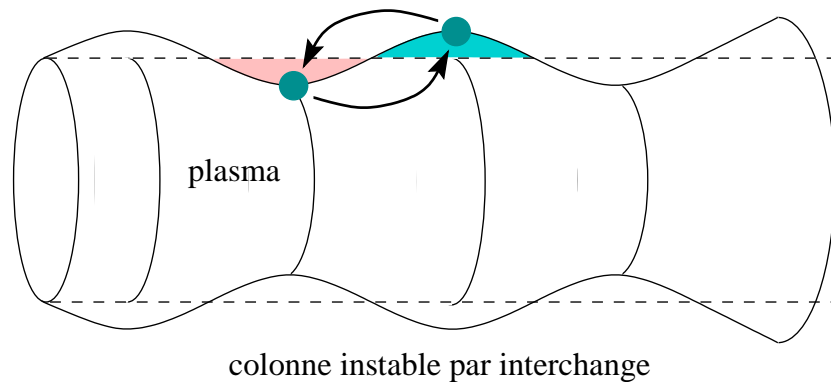
- Confinement gravitationnel \Rightarrow convection
- Présence du champ magnétique \Rightarrow mode de Parker
- Confinement magnétique \Rightarrow mode de pression

Contraintes : équilibre des pressions ; conservation de la masse et du flux magnétique

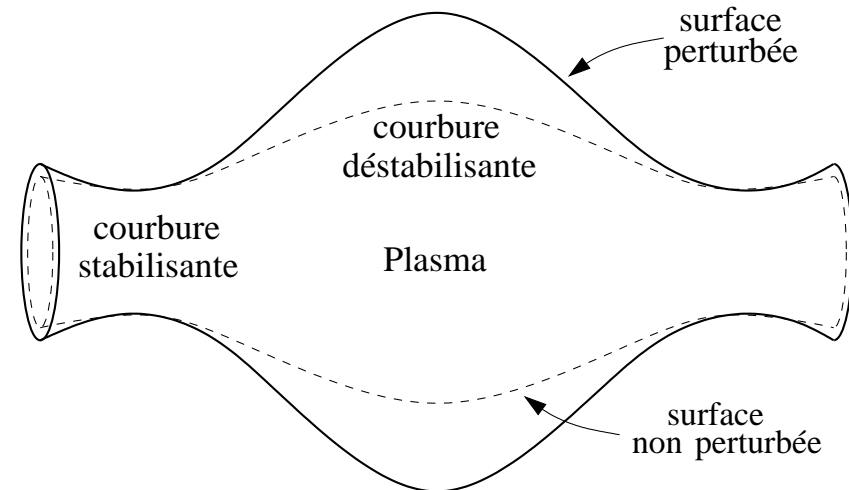
Modes MHD d'Interchange et de Ballooning

Confinement magnétique

Très étudiés pour la fusion thermonucléaire et en physique spatiale, mais peu en astrophysique



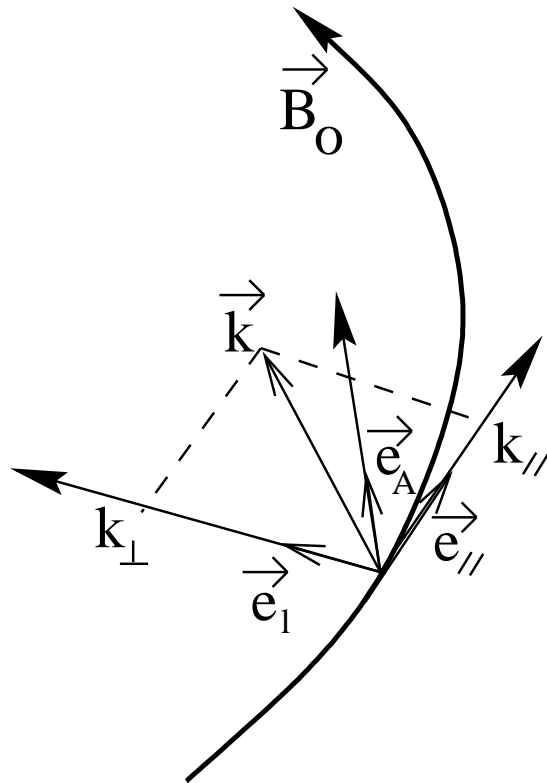
- Mode d'**Interchange**
- Axisymétrique \Rightarrow « saucisse »
- $m = 1 \Rightarrow$ hélice



- Mode localisé de **Ballooning**
- **Courbure favorable et défavorable**
- Très contraignant pour la fusion

Équations de la MHD linéarisées

Première étape : linéariser la MHD



- Hypothèses
 - MHD idéale et équation d'état barotropique
 - Étude perturbative \Rightarrow équations linéaires
 - Plasma hétérogène et structure magnétique quelconque
- On obtient un système différentiel général
 - Deux équations couplées portant sur le déplacement
 - Dérivation suivant le champ magnétique
 - Valide pour des champs de forces extérieurs

Très général mais complexe

Dérivation des Équations de « Ballooning »

- On restreint les variations des perturbations
 - Choix de l'**ordering**: $k_{\perp} L_o \gg 1$ et $k_{\perp} \gg k_{\parallel} \Rightarrow L_o \omega \sim V_A$ et $\xi_{\parallel} \sim \xi_A \gg \xi_l$
 - Propagation **lente quasi-transverse** (Newcomb, 1961)
 - Ondes **magnéto-soniques rapides** purement compressionnelles **découplées**
- **Pas de mode particulier**: ni transformation de Fourier, ni approximation WKB
- Équation du mouvement transversale: $\delta P_m + \delta P_{th} = 0$
- Équations de d'évolution incluant **hétérogénéités** et **géométrie du champ magnétique**:

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - \mathcal{D}_A \cdot \xi_A = \mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} + \mathcal{F}_A(\vec{\xi})$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - \mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A + \mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi})$$

Équilibre MHD pur

- Équilibre **pression-tension** transversal: $\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho = \vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b\perp}$ avec $\beta = C_S^2/V_A^2$
- Système différentiel :

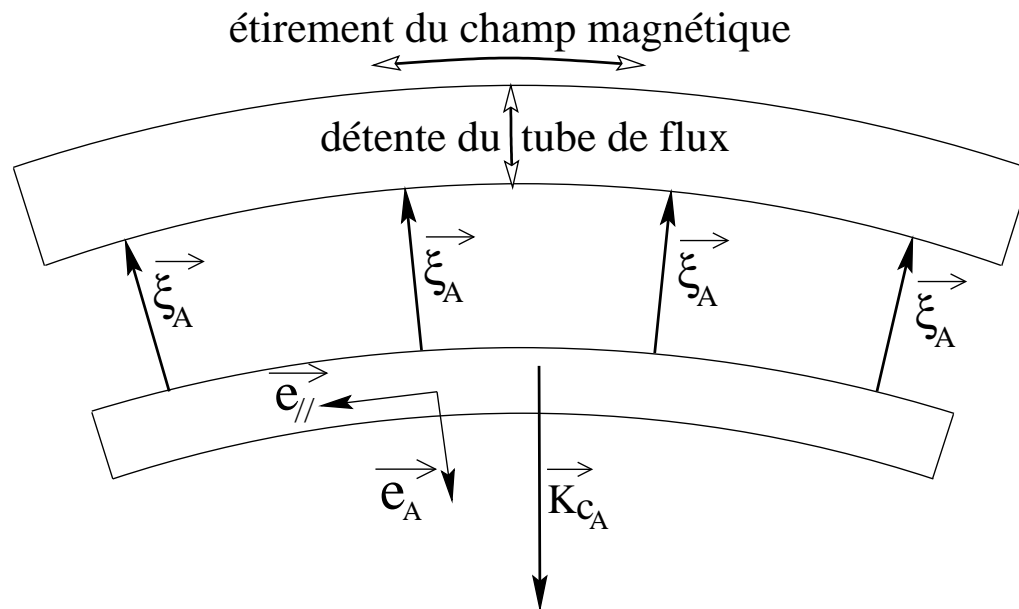
$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{K}_{b\parallel} \frac{\partial}{\partial s} + 2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right] \xi_A = 2 C_S^2 \mathcal{K}_{cA} \nabla \cdot \vec{\xi}$$

- Géométrie du champ magnétique dans $\mathcal{K}_{b\parallel}$ et Γ^+ : évasement, torsion et **cisaillement**
- **Couplage** en $\nabla \cdot \vec{\xi} \equiv$ **courbure et variations parallèles**

Absence de Variations Parallèles

Pression constante \Rightarrow **déstabilisation par la fluctuation de tension transverse**



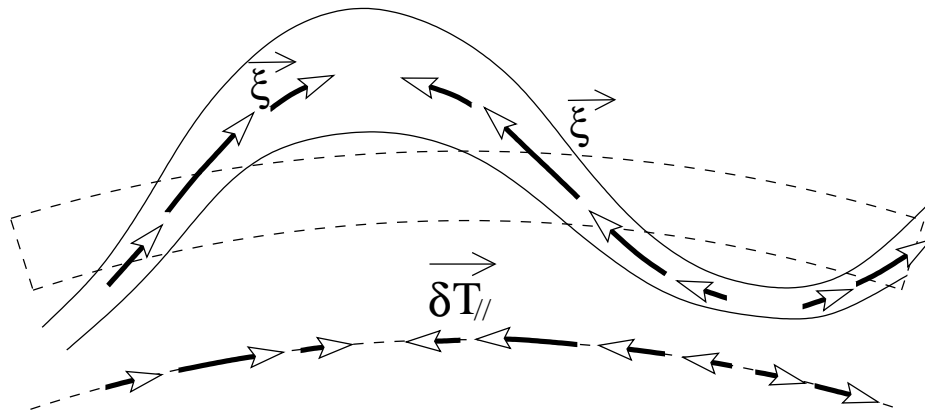
$$\delta T_A = 2\rho_0 V_A^2 \mathcal{K}_{cA} \delta b_{//}$$

$$\delta b_{//} = \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A$$

Critère d'instabilité: $\mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} > \frac{2}{1 + \beta} \mathcal{K}_{cA}^2$

Présence de Variations Parallèles

Rôle majeur de la fluctuation de tension parallèle \Rightarrow interprétation moins directe



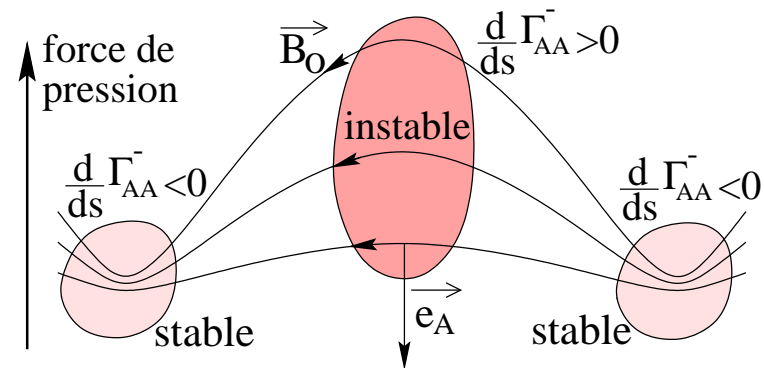
Mais dans le cas :

- Mode de la forme $\exp[i(k_{\parallel} s - \omega t)]$
- Limite $L_0 k_{\parallel} \ll 1$

$$\omega^2 = -2\beta \frac{\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A}}{k_0^2} k_{\parallel}^2 V_S^2$$

- Condition suffisante d'instabilité : $\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A} > 0$
- Le plasma peut être **instable** malgré δT_A stabilisant

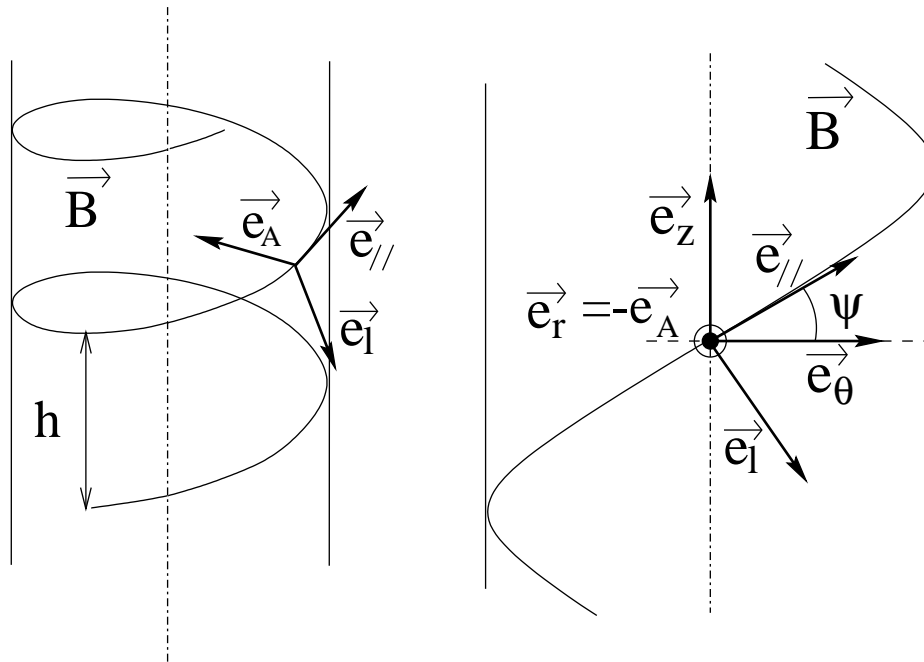
Termes Géométriques



- Termes de géométrie \Rightarrow contribution dans δT_A
- Stabilité dépend de la **courbure** et de **ses variations** d'ordre zéro
- **Évasement** \Rightarrow **courbure favorable** et **défavorable**
- Modes **localisés de Ballooning**

Jet Cylindrique Asymptotique en Rotation

Colonne **cylindrique**, **axisymétrique** et **invariante verticalement**



- Rotation quasi-solide sans mouvement vertical : $v_{o\theta} = r\Omega_o$ et $v_{oz} = 0$
- Surfaces magnétiques cylindriques :
 $\vec{B}_o = B_o \vec{e}_{\parallel} = B_{o\theta} \vec{e}_{\theta} + B_{oz} \vec{e}_z$
- Instabilité maximale si $\vec{e}_A \parallel \vec{K}_c$
 $\Rightarrow \vec{e}_A = -\vec{e}_r$

Transformée de Fourier exacte sur les surfaces magnétiques :

$$\xi \rightarrow \xi(r) \exp[i(m\theta + k_z z - \omega t)]$$

Étude sans Rotation

- Équation de dispersion bicarrée d'ordre 4 : ondes d'Alfvén et magnéto-sonique lente
- Une seule racine peut devenir négative :

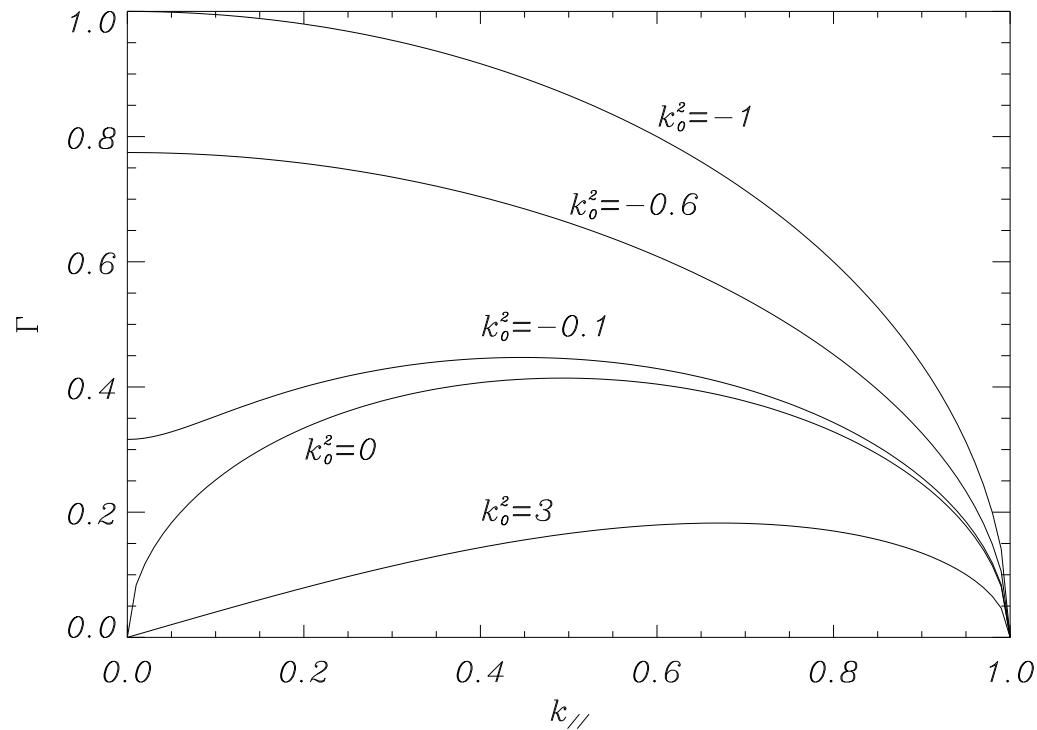
$$\omega_-^2 = \frac{V_A^2}{2} \left\{ \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 - \sqrt{\left(\frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 \right)^2 - \frac{4\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2)} \right\}$$

$$k_c^2 = \underbrace{(\Gamma^+ \Gamma^-)_{AA}}_{\text{Géométrie}} + \underbrace{2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A}}_{\text{Interchange}} \quad \text{et} \quad k_o^2 = -k_c^2 + \underbrace{\frac{4\beta}{1 + \beta} \mathcal{K}_{cA}^2}_{\text{Compression}}$$

$$\omega^2 < 0 \text{ lorsque } k_c^2 > k_{\parallel}^2 > 0$$

Nature des Solutions à $\omega^2 < 0$

Instabilité dans la limite $k_{//} \rightarrow 0$: deux comportements différents



- $k_o^2 > 0 \Rightarrow$ Mode magnéto-sonique :

$$\omega_-^2 \simeq -\frac{k_c^2}{|k_o^2|} k_{//}^2 V_S^2$$

- $k_o^2 < 0 \Rightarrow$ Mode alfvénique :

$$\omega_-^2 \simeq -|k_o|^2 V_A^2$$

$k_{// \max}$ et Γ_{\max} dépendent de k_o^2

Étude avec Rotation

- Modification des échelles d'équilibre

$$\beta \mathcal{K}_{\rho_A} = \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} - \frac{\chi}{r} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{r^2 \Omega_o^2}{V_A^2}$$

- Équilibre $\Rightarrow \chi \lesssim 1$
- Effet de la rotation :
 - force de Coriolis stabilisante : mouvements épicycliques
 - force d'entraînement inertiel de même nature que δT_A
- Nouveaux couplages et équation de dispersion non bicarrée \Rightarrow résolution difficile

Cœur de Jet Instable

- **Jet issu d'un disque** \Rightarrow l'inertie du plasma crée du champ magnétique azimuthal

au voisinage du cœur :

$$\frac{B_{o\theta}}{B_{oz}} = \frac{r}{v_z} (\Omega_o - \Omega_*) \Rightarrow \begin{cases} \Omega_o - \Omega_* \rightarrow 0 \\ B_{oz} > B_{o\theta} \\ B_{o\theta}/B_{oz} \propto r^\alpha, \alpha > 1 \end{cases}$$

(Pelletier & Pudritz, 1992)

- La tension magnétique croît avec $r \Rightarrow$ **cisaillement magnétique S négatif**
- **Terme géométrique dominant et déstabilisant :**

$$\omega^2 \simeq 2 \frac{V_A^2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} S < 0$$

- **Choix du mode \Rightarrow critère linéaire en S et non quadratique (Suydam, 1958)**

Cœur de Jet Instable

- Variations radiales de B_{oz}
 - $B_{oz} \gg B_{o\theta} \Rightarrow B_{oz}$ confine le plasma : $\frac{d}{dr} B_{oz} < 0$
 - À la fois S et $\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A}$ déstabilisent le plasma
- Faible rôle de la rotation \equiv forces d'entraînement et de Coriolis
 - Toujours instable si B_{oz} varie suivant r
 - Requiert une croissance rapide de $B_{o\theta}$ sinon ($\propto r^4$ si $\beta = 1$)

Régions de confinement

- **Confinement des jets** $\Rightarrow B_{o\theta} \gg B_{oz}$ (évasement et conservation du flux)
- **Configuration de Z pinch** (Kadomtsev, 1966)

– Instabilité si $0 < k_{\parallel}^2 < k_c^2 \iff \frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > -\frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \frac{1}{2} \left(m \frac{B_{o\theta}}{B_o} + r k_z \frac{B_{oz}}{B_o} \right)^2$

– Alfvénique ou magnéto-sonique?

Alfvénique si $\frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} \Rightarrow$ réalisable aisément

- **Rotation stabilisante mais doit être dynamiquement significative !**

Conclusion

- Nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités de pression
- Jet de disque (faible rotation) \Rightarrow cœur et régions de confinement instables par interchange
- Temps de croissance \equiv temps dynamique $\omega^2 \propto V_A^2 / r^2$

Difficultés analytiques intrinsèques {
étude des instabilités de pression
application à l'accrétion-éjection magnétisée

\Rightarrow Simulations numériques

MHD Numérique

Principe du Calcul Numérique

- Résolution des EDPs de la MHD
 - Méthode de résolution
 - Propriétés des algorithmes : **consistance**, **stabilité** et **convergence**
 - Stabilisation des schémas \Rightarrow **dissipation artificielle**
 - Traitement des **conditions aux limites** et des **conditions initiales**
- Particularités de la MHD
 - Contrainte $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 - **Nouveaux modes de propagation**
 - **Régime dynamique du champ magnétique**
 - **Force de Laplace parallèle nulle**

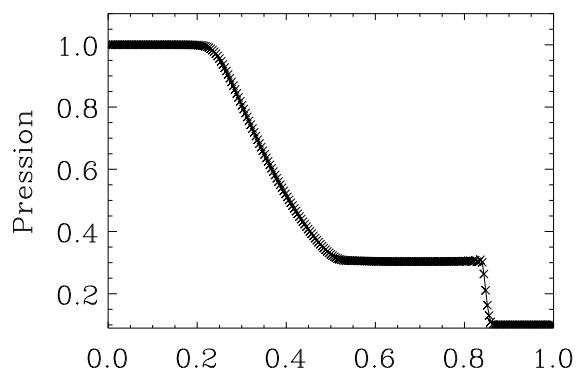
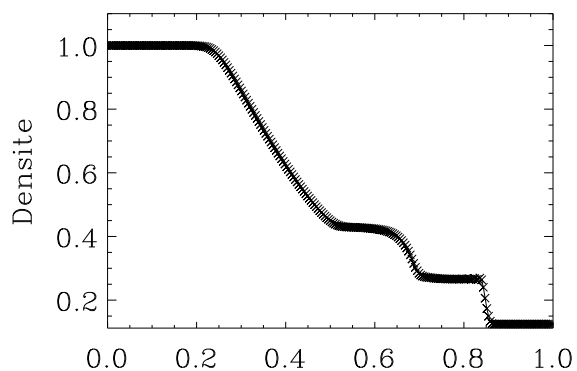
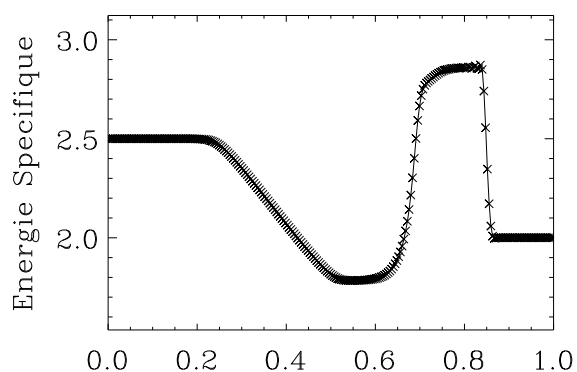
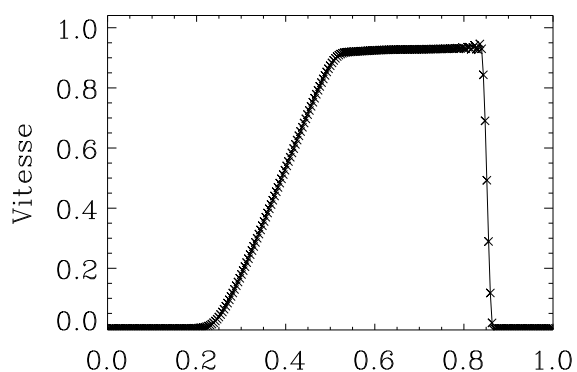
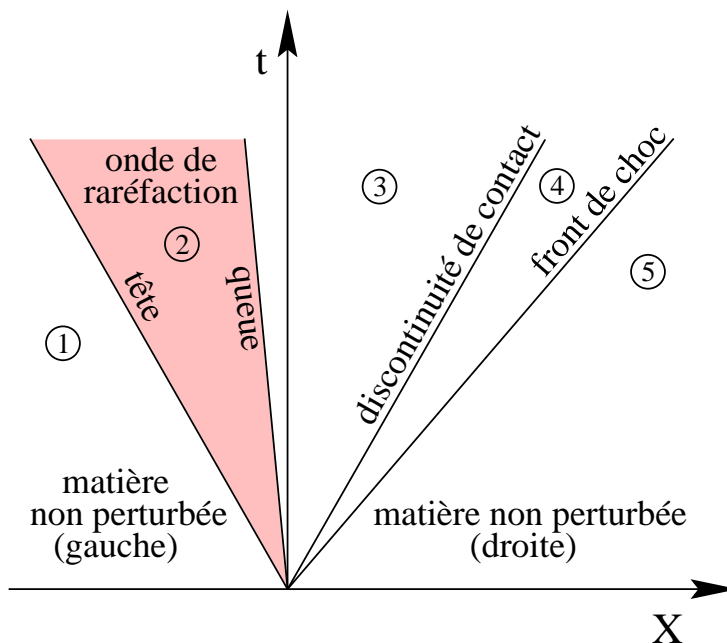
Algorithme Initial

- Géométrie : cartésien 2D
- Algorithme : différences finies, non conservatif
- Intégration en temps : Adams-Bashforth à l'ordre 4
- Intégration en espace : différences finies centrées à l'ordre 4, maillage unique
- Condition aux limites : bi-périodique
- Conservation du flux magnétique : évolution du potentiel vecteur
- dissipation artificielle : constante sur toutes les équations \Rightarrow très diffusif

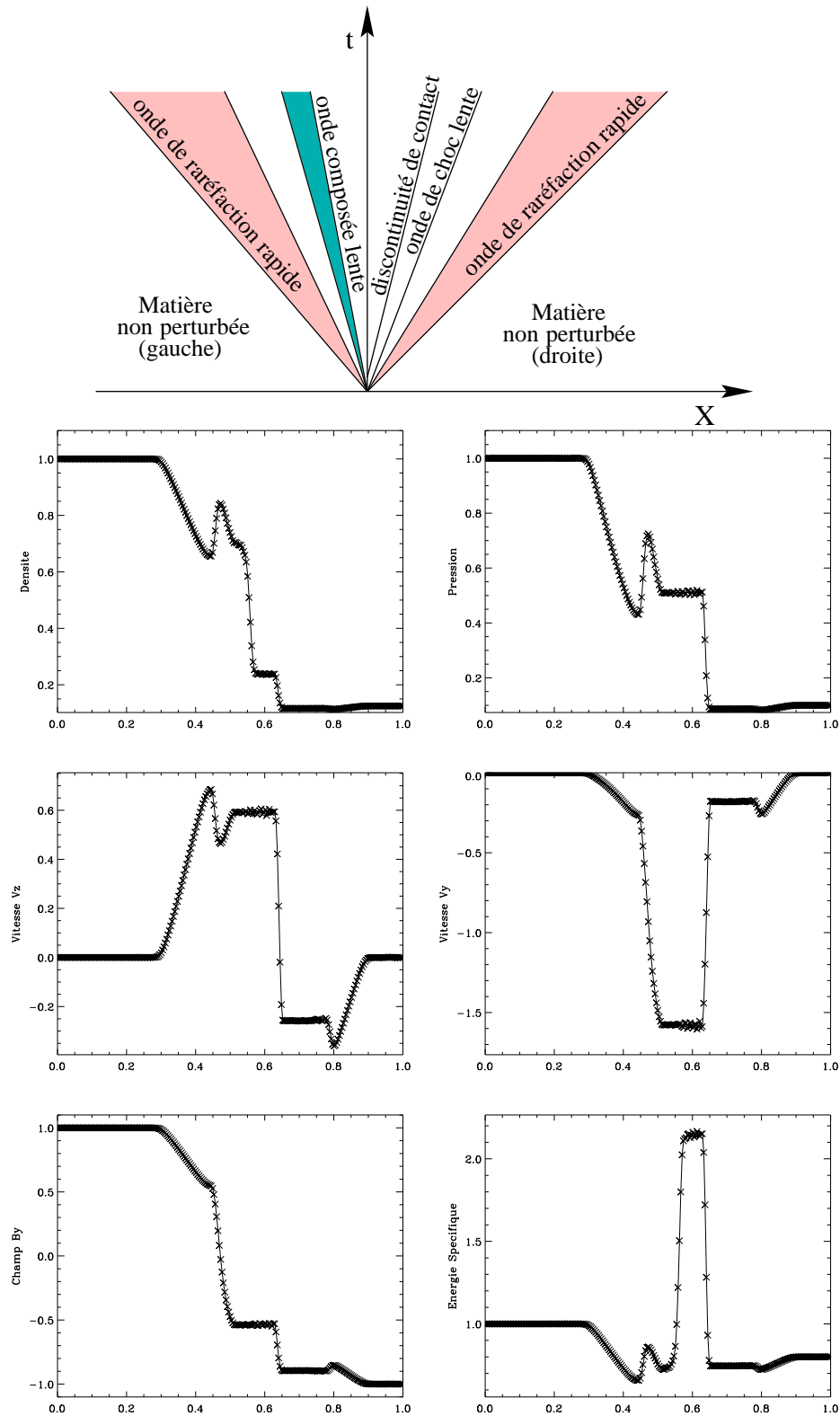
Développements Effectués

- Géométrie :
 - Passage en 3D et optimisation (Fortran 90)
 - Cartésien
 - Shearing Sheet \Rightarrow simulation d'une portion de disque en rotation différentielle
- Algorithme : Parallélisation du code (décomposition en domaines et librairie MPI)
- Intégration en temps : prédicteur/correcteur de Hyman à pas de temps variable (Hyman, 1979)
- Conditions aux limites : symétriques (miroir) et antisymétriques (absorbantes)
- dissipation artificielle :
 - Capture de chocs : limite la formation de fronts de chocs
 - Hyperviscosité : sélection des petites échelles

Tube de Riemann HD

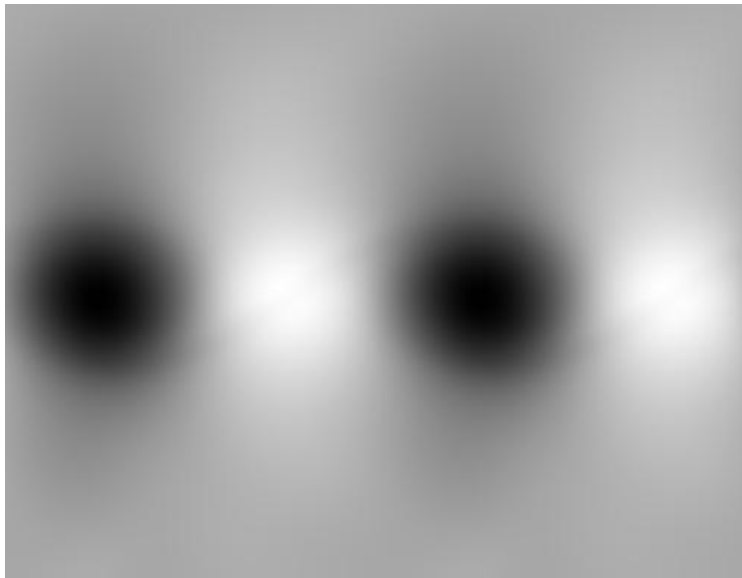


Tube de Riemann MHD



Kelvin-Helmholtz 2D - Champ Magnétique Perpendiculaire

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
32	16	128	32	1	1.2	1	1	0	1



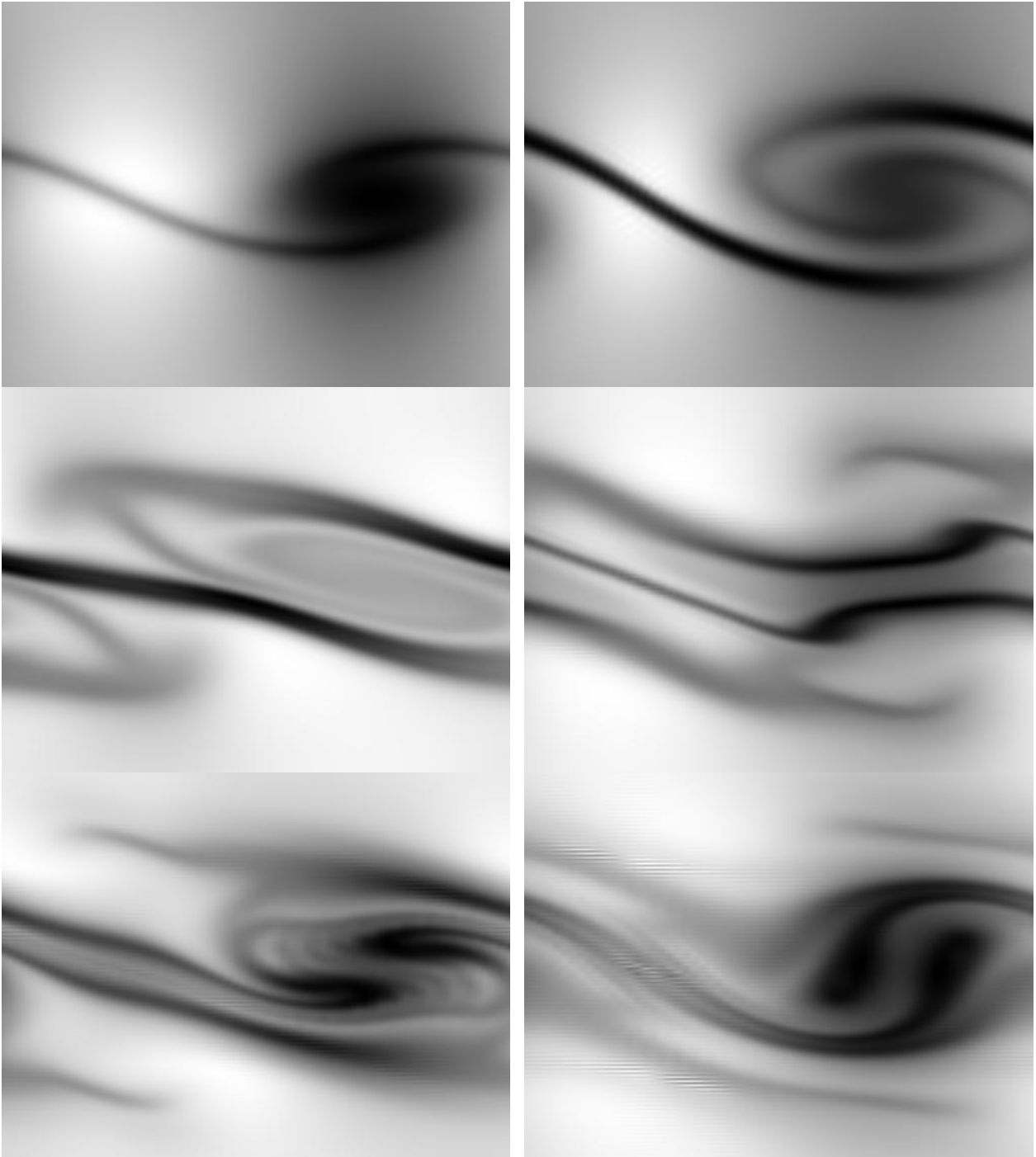
Densité



Vorticité

Kelvin-Helmholtz - Retournement de \tilde{B}

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
64	16	256	32	1	1.2	1	0	0.1	100



Conclusion

- Travaux sur des points importants de la MHD numérique
- Développements techniques lourds

↪ Différentes version d'un code MHD 3D

↪ Physique correcte

↪ Choix des algorithmes \Rightarrow simulations souhaitées inaccessibles

Conclusion et Perspectives

- Nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités de pression
- Expérience acquise en MHD numérique

Finalité de ces travaux :

- ⇒ Gradient critique \rightsquigarrow avalanche \rightsquigarrow \vec{B} déstructuré \rightsquigarrow reconstruction par rotation
Génération de nodosités?
- ⇒ **Ballooning**
 - Région de lancement des jets
 - Turbulence dans les disques et éjection sporadique : problème résistif global
 - Évacuation du flux magnétique dans l'effondrement des nuages moléculaires
- ⇒ Études numériques du problème des instabilités de pression dans les jets et disques