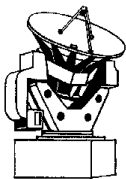


Étude Analytique et Numérique du Développement d'Instabilités MHD dans des Structures d'Accrétion-Éjection Magnétisées

Evyy Kersalé

Sous la direction de Guy Pelletier et de Pierre-Yves Longaretti



OBSERVATOIRE DES SCIENCES
DE L'UNIVERS DE GRENOBLE

Laboratoire d'Astrophysique



SHERPAS

Plan de l'Exposé

I. Contexte de l'Étude

- Jets Magnétisés
- Puissance de l'Accrétion
- Structures MHD

II. Instabilités MHD de Pression

- Présentation
- Équations d'Évolution
- Mécanisme Physique
- Application aux Jets

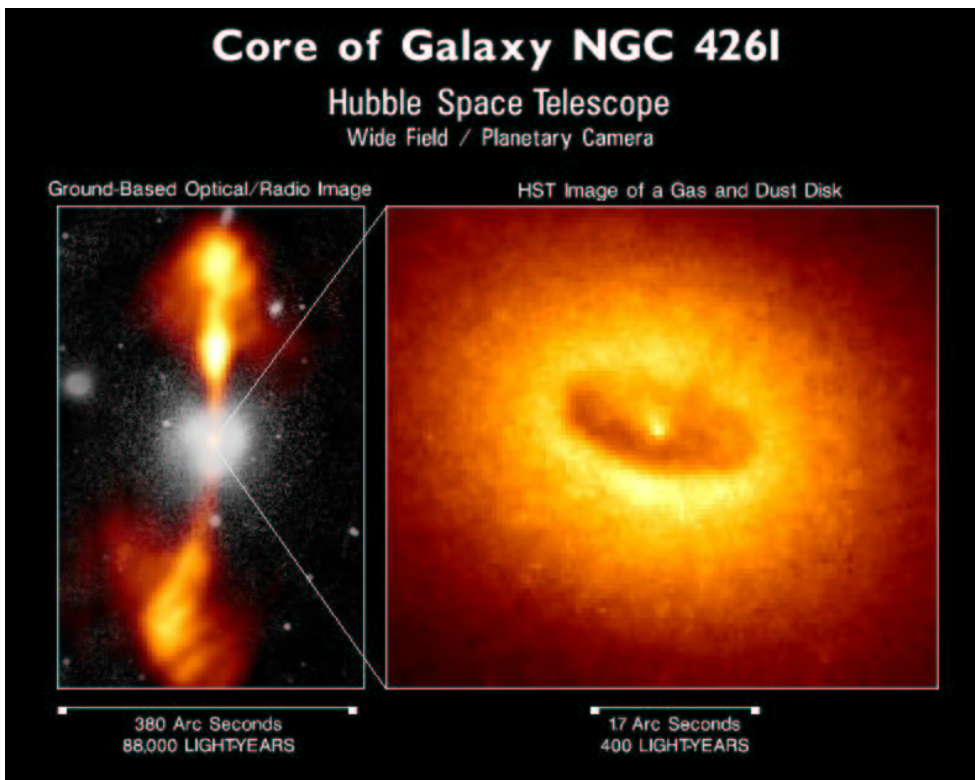
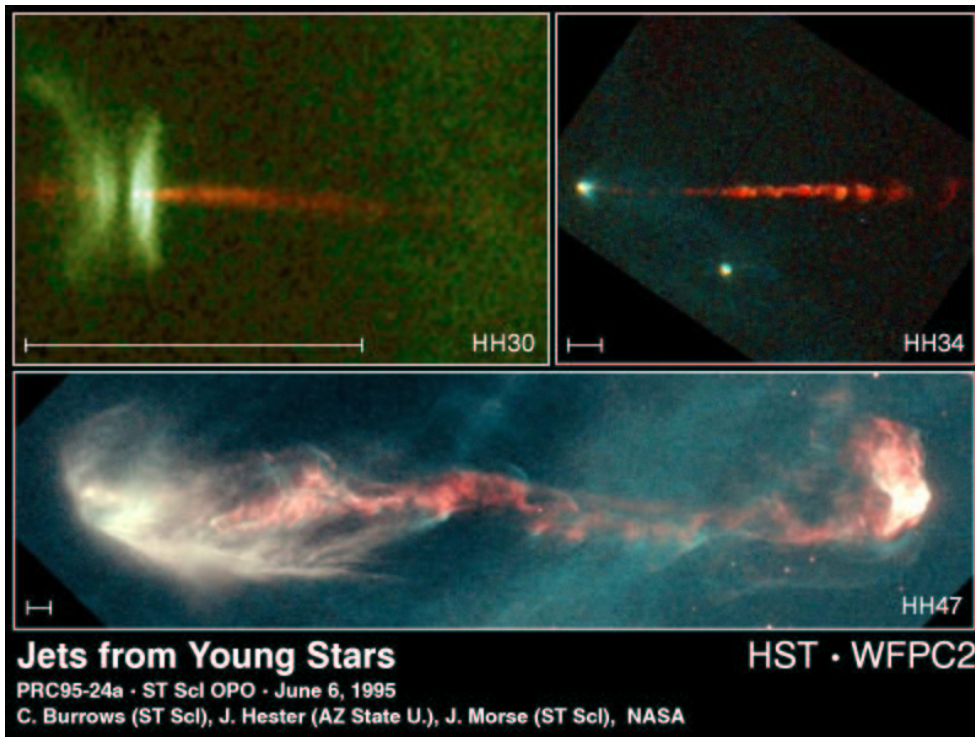
III. MHD Numérique

- Problématique
- Schémas Implémentés
- Dissipation Numérique
- Tests du Code

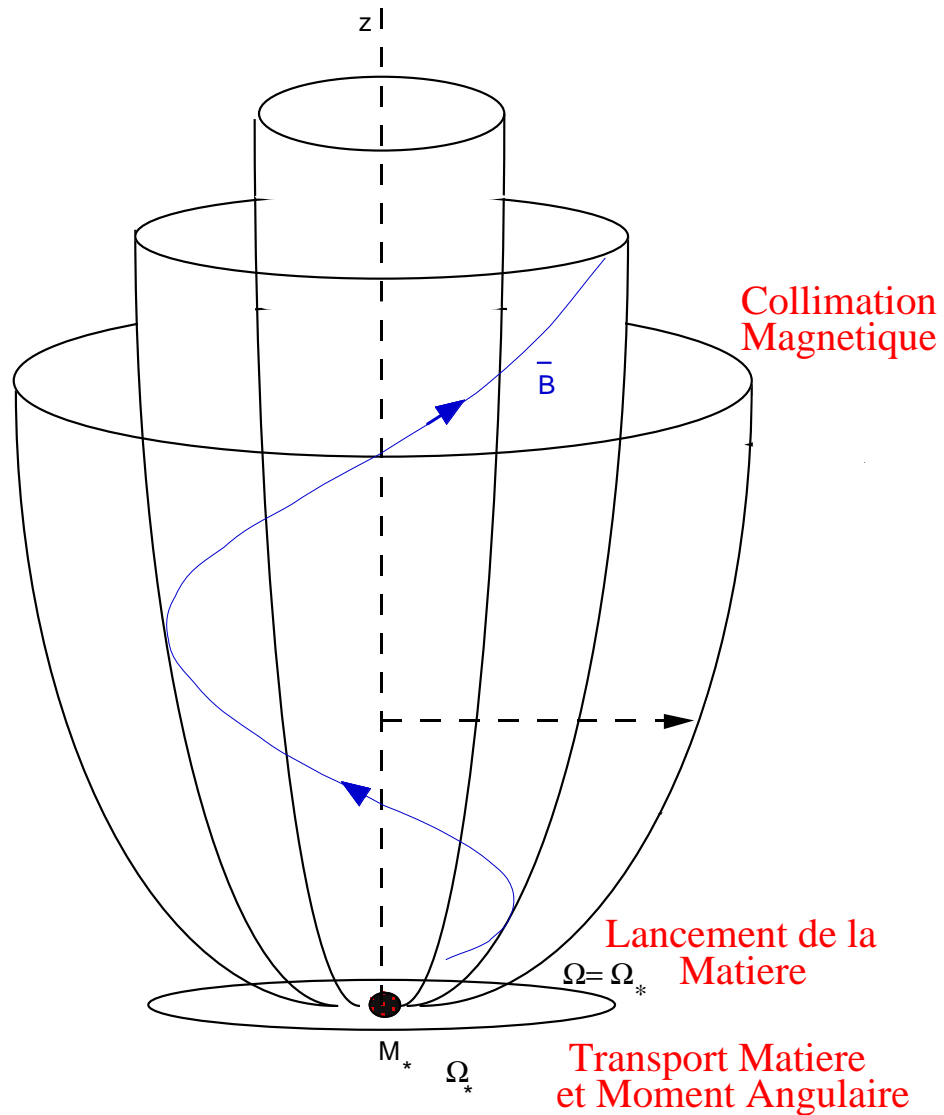
IV. Conclusion & Perspectives

Contexte de l'Étude

Jets Galactiques et Extragalactiques



Structures d'Accrétion-Éjection Magnétisées



MHD Jet

Magnétohydrodynamique

Plasma {
 complètement ionisé
 champ magnétique
 non résistif

Continuité: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \vec{v}$

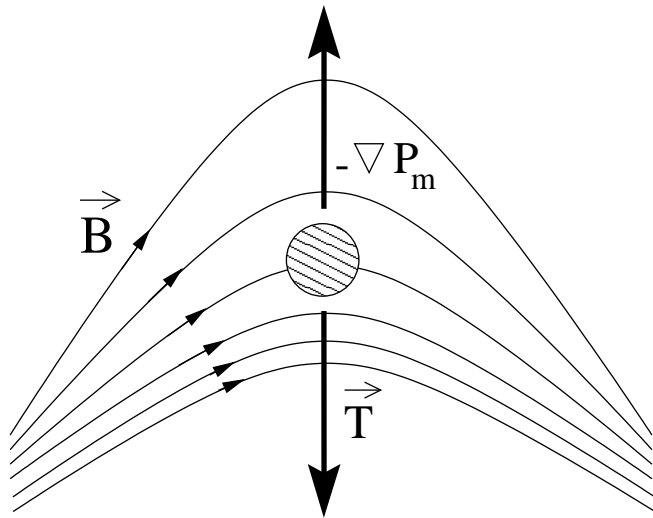
Induction: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$

État: $P \propto \rho^\gamma$

Mouvement: $\frac{d\rho \vec{v}}{dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{\mathcal{F}}$

Gel: matière et champ magnétique étroitement couplés

Force de Laplace : $\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla P_m + \vec{T}$



– Pression : $P_m = \frac{B^2}{2\mu}$

– Tension : $\vec{T} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B}$

Échelles caractéristiques :

$\vec{\mathcal{K}}_\rho$: densité — $\vec{\mathcal{K}}_b$: champ magnétique — $\vec{\mathcal{K}}_c$: courbure

Motivations des Travaux

- Mécanisme de **chauffage du cœur des jets**?
- Production de **surluminosités dans les jets** : avalanche?
- **Disques** magnétisés avec $\beta = 1$: quel processus instable?
- **Éjection sporadique** de matière : avalanche?

Instabilités MHD de Pression

Principe d'Énergie

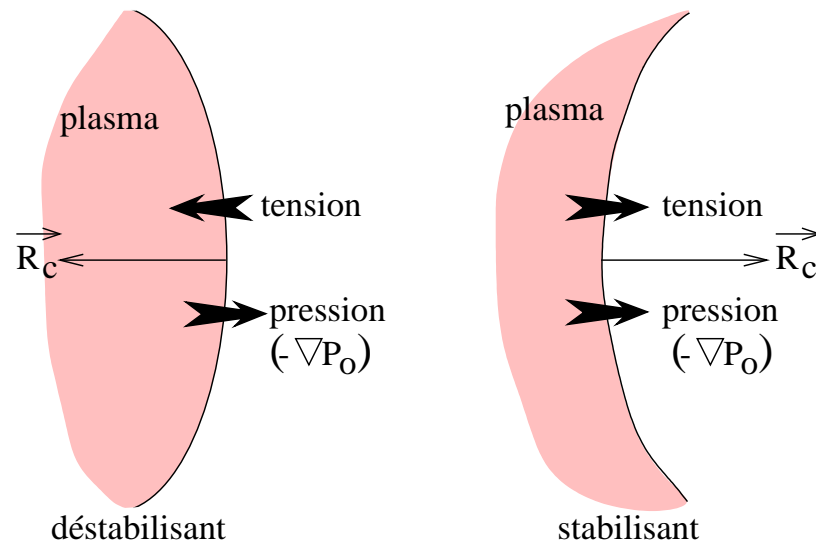
- Croissance d'une perturbation infinitésimale \Rightarrow **instabilité**
- Énergie potentielle convertie en énergie cinétique: $\delta W < 0$

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P d^3 \vec{r} \left[\underbrace{\frac{|\delta \vec{B}_\perp|^2}{\mu}}_{\text{Alfvén}} + \underbrace{\frac{B_o}{2\mu} |\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp + 2 \vec{\xi}_\perp \cdot \vec{\mathcal{K}}_c|^2}_{\text{magnéto-sonore}} + \underbrace{\gamma P_o |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2}_{\text{sonore}} \right. \\ \left. - \underbrace{2 \left(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla P_o \right) \left(\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \vec{\xi}_\perp^* \right)}_{\text{interchange - ballooning}} - \underbrace{j_{o\parallel} \left(\vec{\xi}_\perp^* \times \vec{e}_\parallel \right) \cdot \delta \vec{B}_\perp}_{\text{kink}} \right] \quad (\text{Furth } et \text{ al, } 1965)$$

Instabilité MHD : champ magnétique \equiv source d'énergie

Instabilités MHD Linéaires non Résistives

Moteur $\left\{ \begin{array}{l} \text{Courant parallèle } (L_o k_{\perp} \sim 1) \\ \text{Pression thermique } (L_o k_{\perp} \gg 1) \end{array} \right. \begin{array}{l} \implies \text{Kink (reste effectif dans la limite force-free)} \\ \implies \text{Interchange et Ballooning} \end{array}$



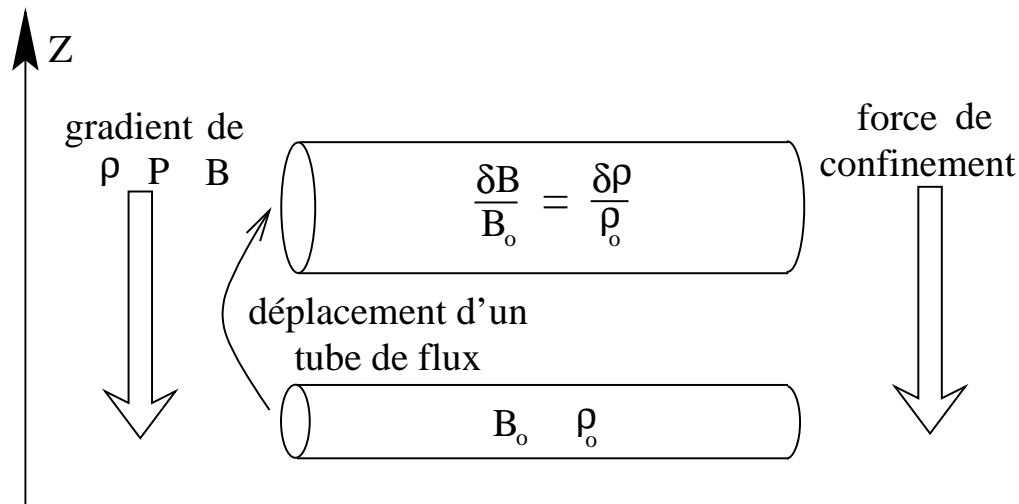
Instabilité de Pression

$$\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \nabla P_o < 0 \Rightarrow \text{stabilisant}$$

$$\vec{\mathcal{K}}_c \cdot \nabla P_o > 0 \Rightarrow \text{déstabilisant}$$

Principe de l'Interchange

Échange de deux éléments fluides \Rightarrow l'énergie potentielle diminue \Rightarrow instabilité
 Archétype : instabilité de Rayleigh-Taylor



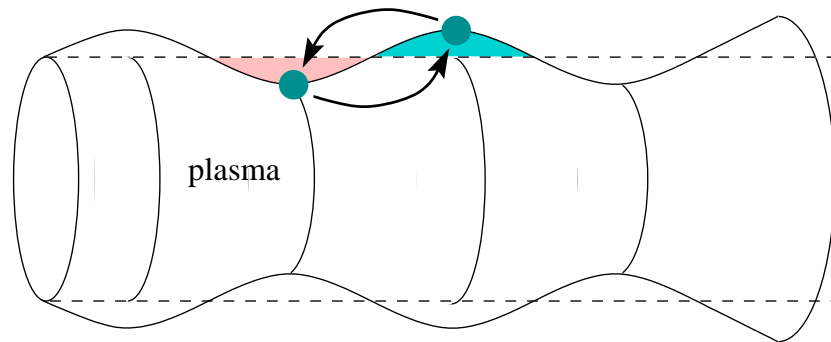
- Confinement gravitationnel \Rightarrow convection
- Présence du champ magnétique \Rightarrow mode de Parker
- Confinement magnétique \Rightarrow mode de pression

Contraintes : équilibre des pressions ; conservation de la masse et du flux magnétique

Modes MHD d'Interchange et de Ballooning

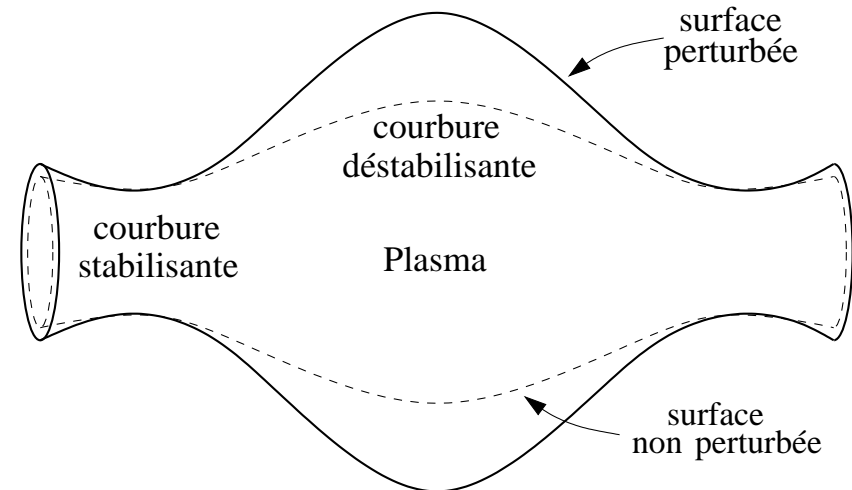
Confinement magnétique

Très étudiés pour la fusion thermonucléaire et en physique spatiale, mais peu en astrophysique



colonne instable par interchange

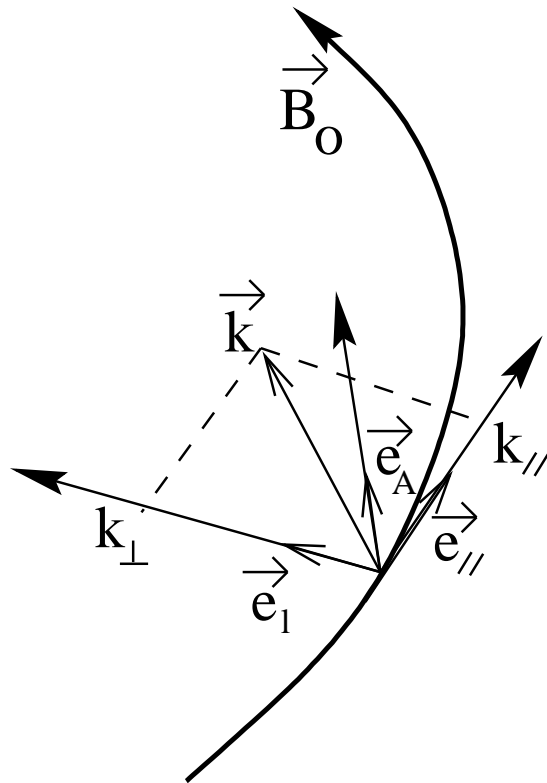
- Mode d'**Interchange**
- Axisymétrique \Rightarrow « saucisse »
- $m = 1 \Rightarrow$ hélice



- Mode localisé de **Ballooning**
- **Courbure favorable et défavorable**
- Très contraignant pour la fusion

Équations de la MHD linéarisées

Première étape : linéariser la MHD



- Hypothèses
 - MHD idéale et équation d'état barotrope
 - Étude perturbative \Rightarrow équations linéaires
 - Plasma hétérogène et structure magnétique quelconque
- On obtient un système différentiel général
 - Deux équations couplées portant sur le déplacement
 - Dérivation suivant le champ magnétique
 - Valide pour des champs de forces extérieurs

Très général mais complexe

Dérivation des Équations de « Ballooning »

- On restreint les variations des perturbations
 - Choix de l'**ordering**: $k_{\perp} L_o \gg 1$ et $k_{\perp} \gg k_{\parallel} \Rightarrow L_o \omega \sim V_A$ et $\xi_{\parallel} \sim \xi_A \gg \xi_l$
 - Propagation **lente quasi-transverse** (Newcomb, 1961)
 - Ondes **magnéto-soniques rapides** purement compressionnelles **découplées**
- **Pas de mode particulier**: ni transformation de Fourier, ni approximation WKB
- Équation du mouvement transversale: $\delta P_m + \delta P_{th} = 0$
- Équations de d'évolution incluant **hétérogénéités** et **géométrie du champ magnétique**:

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - \mathcal{D}_A \cdot \xi_A = \mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} + \mathcal{F}_A(\vec{\xi})$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - \mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A + \mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi})$$

Équilibre MHD pur

- Équilibre **pression-tension** transversal: $\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho = \vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b\perp}$ avec $\beta = C_S^2/V_A^2$
- Système différentiel :

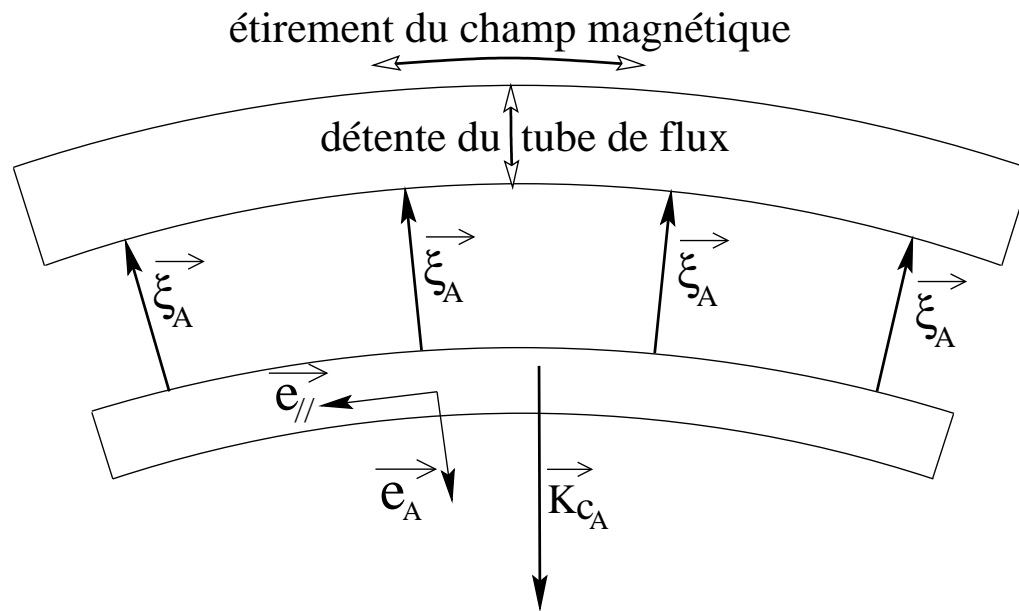
$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{K}_{b\parallel} \frac{\partial}{\partial s} + 2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right] \xi_A = 2 C_S^2 \mathcal{K}_{cA} \nabla \cdot \vec{\xi}$$

- Géométrie du champ magnétique dans $\mathcal{K}_{b\parallel}$ et Γ^+ : évasement, torsion et **cisaillement**
- **Couplage** en $\nabla \cdot \vec{\xi} \equiv$ **courbure et variations parallèles**

Absence de Variations Parallèles

Pression constante \Rightarrow **déstabilisation par la fluctuation de tension transverse**



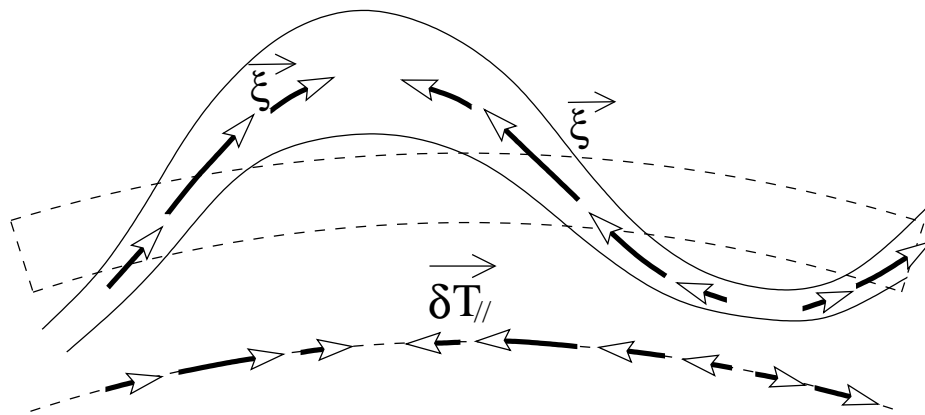
$$\delta T_A = 2\rho_0 V_A^2 \mathcal{K}_{cA} \delta b_{//}$$

$$\delta b_{//} = \frac{\beta}{1 + \beta} (\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA}) \xi_A$$

Critère d'instabilité: $\mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} > \frac{2}{1 + \beta} \mathcal{K}_{cA}^2$

Présence de Variations Parallèles

Rôle majeur de la fluctuation de tension parallèle \Rightarrow interprétation moins directe



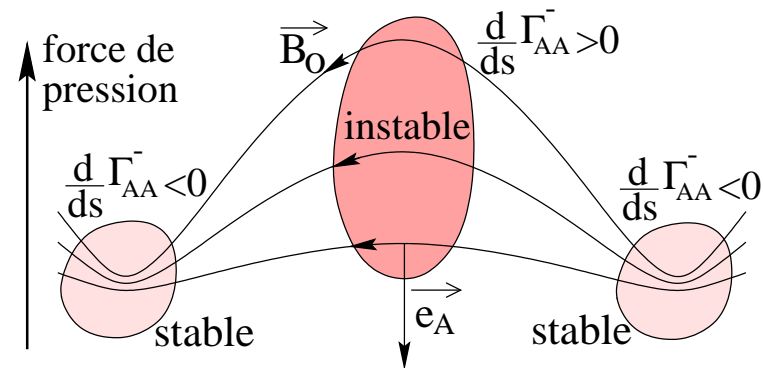
Mais dans le cas :

- Mode de la forme $\exp[i(k_{\parallel} s - \omega t)]$
- Limite $L_0 k_{\parallel} \ll 1$

$$\omega^2 = -2\beta \frac{\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A}}{k_0^2} k_{\parallel}^2 V_S^2$$

- Condition suffisante d'instabilité : $\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A} > 0$
- Le plasma peut être **instable** malgré δT_A stabilisant

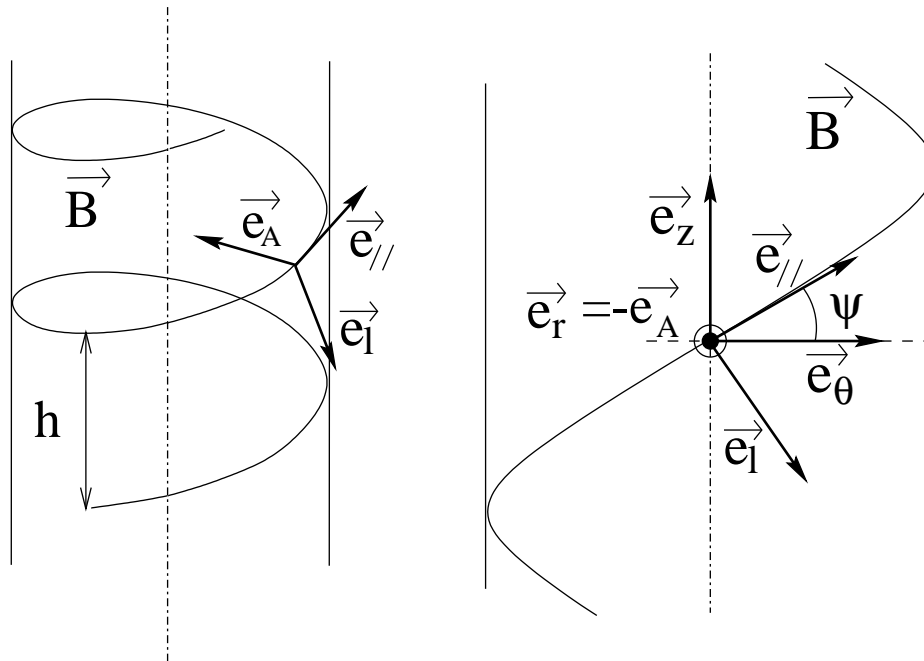
Termes Géométriques



- Termes de géométrie \Rightarrow contribution dans δT_A
- Stabilité dépend de la **courbure** et de **ses variations** d'ordre zéro
- **Évasement** \Rightarrow **courbure favorable** et **défavorable**
- Modes **localisés de Ballooning**

Jet Cylindrique Asymptotique en Rotation

Colonne **cylindrique**, **axisymétrique** et **invariante verticalement**



- Rotation quasi-solide sans mouvement vertical : $v_{o\theta} = r\Omega_o$ et $v_{oz} = 0$
- Surfaces magnétiques cylindriques :
 $\vec{B}_o = B_o \vec{e}_{\parallel} = B_{o\theta} \vec{e}_{\theta} + B_{oz} \vec{e}_z$
- Instabilité maximale si $\vec{e}_A \parallel \vec{K}_c$
 $\Rightarrow \vec{e}_A = -\vec{e}_r$

Transformée de Fourier exacte sur les surfaces magnétiques :

$$\xi \rightarrow \xi(r) \exp[i(m\theta + k_z z - \omega t)]$$

Étude sans Rotation

- Équation de dispersion bicarrée d'ordre 4 : ondes d'Alfvén et magnéto-sonique lente
- Une seule racine peut devenir négative :

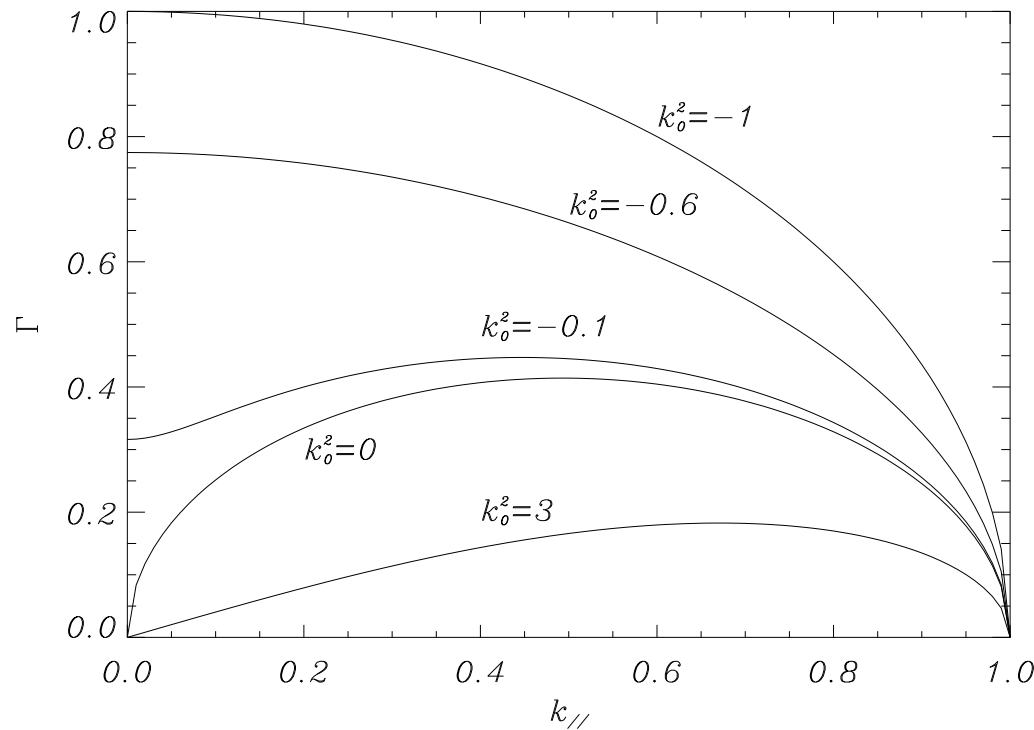
$$\omega_-^2 = \frac{V_A^2}{2} \left\{ \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 - \sqrt{\left(\frac{1 + 2\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 \right)^2 - \frac{4\beta}{1 + \beta} k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2)} \right\}$$

$$k_c^2 = \underbrace{(\Gamma^+ \Gamma^-)_{AA}}_{\text{Géométrie}} + \underbrace{2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A}}_{\text{Interchange}} \quad \text{et} \quad k_o^2 = -k_c^2 + \underbrace{\frac{4\beta}{1 + \beta} \mathcal{K}_{cA}^2}_{\text{Compression}}$$

$$\omega^2 < 0 \text{ lorsque } k_c^2 > k_{\parallel}^2 > 0$$

Nature des Solutions à $\omega^2 < 0$

Instabilité dans la limite $k_{//} \rightarrow 0$: deux comportements différents



- $k_o^2 > 0 \Rightarrow$ Mode magnéto-sonique :

$$\omega_-^2 \simeq -\frac{k_c^2}{|k_o^2|} k_{//}^2 V_S^2$$

- $k_o^2 < 0 \Rightarrow$ Mode alfvénique :

$$\omega_-^2 \simeq -|k_o|^2 V_A^2$$

$k_{// \max}$ et Γ_{\max} dépendent de k_o^2

Étude avec Rotation

- Modification des échelles d'équilibre

$$\beta \mathcal{K}_{\rho A} = \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} - \frac{\chi}{r} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{r^2 \Omega_o^2}{V_A^2}$$

- Équilibre $\Rightarrow \chi \lesssim 1$
- Effet de la rotation :
 - force de Coriolis stabilisante : mouvements épicycliques
 - force d'entraînement inertiel de même nature que δT_A
- Nouveaux couplages et équation de dispersion non bicarrée \Rightarrow résolution difficile

Cœur de Jet Instable

- **Jet issu d'un disque** \Rightarrow l'inertie du plasma crée du champ magnétique azimuthal

au voisinage du cœur :

$$\frac{B_{o\theta}}{B_{oz}} = \frac{r}{v_z} (\Omega_o - \Omega_*) \Rightarrow \begin{cases} \Omega_o - \Omega_* \rightarrow 0 \\ B_{oz} > B_{o\theta} \\ B_{o\theta}/B_{oz} \propto r^\alpha, \alpha > 1 \end{cases}$$

(Pelletier & Pudritz, 1992)

- La tension magnétique croît avec $r \Rightarrow$ **cisaillement magnétique S négatif**
- **Terme géométrique dominant et déstabilisant :**

$$\omega^2 \simeq 2 \frac{V_A^2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} S < 0$$

- **Choix du mode \Rightarrow critère linéaire en S et non quadratique (Suydam, 1958)**

Cœur de Jet Instable

- Variations radiales de B_{oz}
 - $B_{oz} \gg B_{o\theta} \Rightarrow B_{oz}$ confine le plasma : $\frac{d}{dr} B_{oz} < 0$
 - À la fois S et $\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A}$ déstabilisent le plasma
- Faible rôle de la rotation \equiv forces d'entraînement et de Coriolis
 - Toujours instable si B_{oz} varie suivant r
 - Requiert une croissance rapide de $B_{o\theta}$ sinon ($\propto r^4$ si $\beta = 1$)

Régions de confinement

- **Confinement des jets** $\Rightarrow B_{o\theta} \gg B_{oz}$ (évasement et conservation du flux)
- **Configuration de Z pinch** (Kadomtsev, 1966)

– Instabilité si $0 < k_{\parallel}^2 < k_c^2 \iff \frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > -\frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \frac{1}{2} \left(m \frac{B_{o\theta}}{B_o} + r k_z \frac{B_{oz}}{B_o} \right)^2$

– Alfvénique ou magnéto-sonique?

Alfvénique si $\frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} \Rightarrow$ réalisable aisément

- **Rotation stabilisante mais doit être dynamiquement significative !**

Conclusion

- Nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités de pression
- Jet de disque (faible rotation) \Rightarrow cœur et régions de confinement instables par interchange
- Temps de croissance \equiv temps dynamique $\omega^2 \propto V_A^2 / r^2$

Difficultés analytiques intrinsèques { étude des instabilités de pression
application à l'accrétion-éjection magnétisée

\Rightarrow Simulations numériques

MHD Numérique

Principe du Calcul Numérique

- Résolution des EDPs de la MHD
 - Méthode de résolution
 - Propriétés des algorithmes : **consistance**, **stabilité** et **convergence**
 - Stabilisation des schémas \Rightarrow **dissipation artificielle**
 - Traitement des **conditions aux limites** et des **conditions initiales**
- Particularités de la MHD
 - Contrainte $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 - **Nouveaux modes de propagation**
 - **Régime dynamique du champ magnétique**
 - **Force de Laplace parallèle nulle**

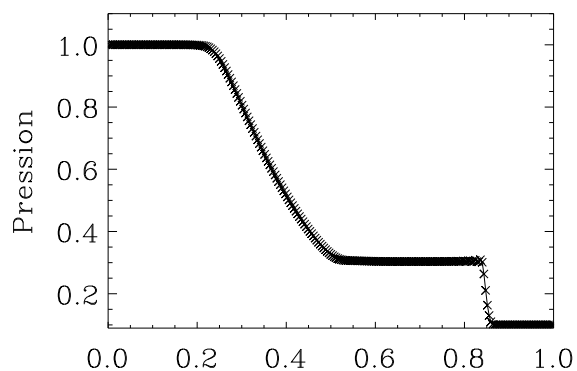
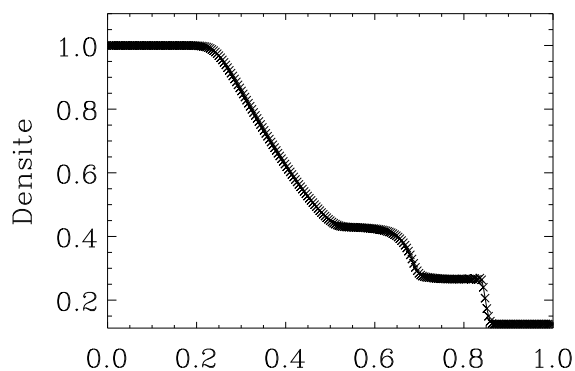
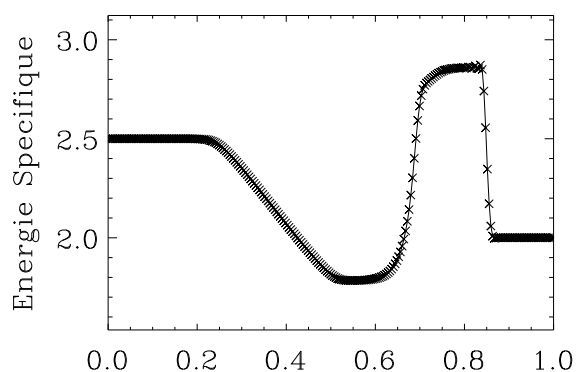
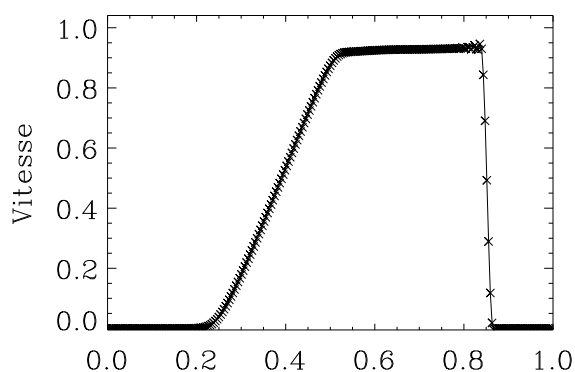
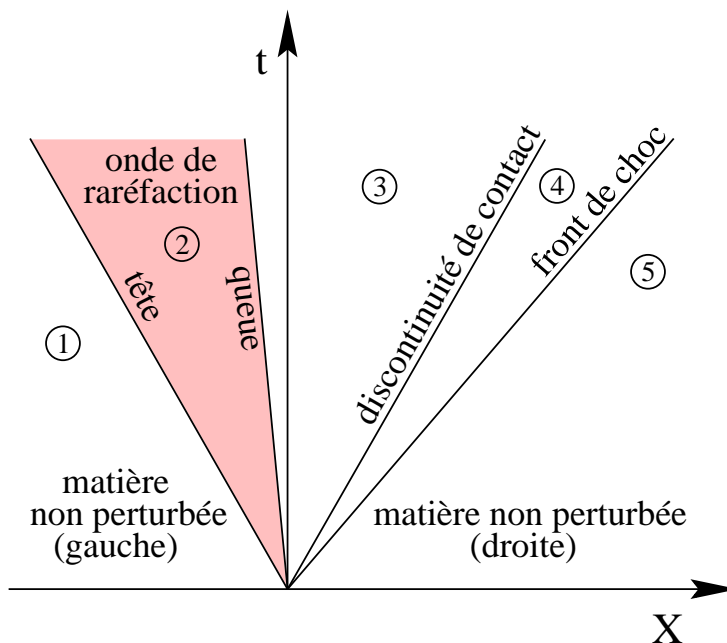
Algorithme Initial

- Géométrie : cartésien 2D
- Algorithme : différences finies, non conservatif
- Intégration en temps : Adams-Bashforth à l'ordre 4
- Intégration en espace : différences finies centrées à l'ordre 4, maillage unique
- Condition aux limites : bi-périodique
- Conservation du flux magnétique : évolution du potentiel vecteur
- dissipation artificielle : constante sur toutes les équations \Rightarrow très diffusif

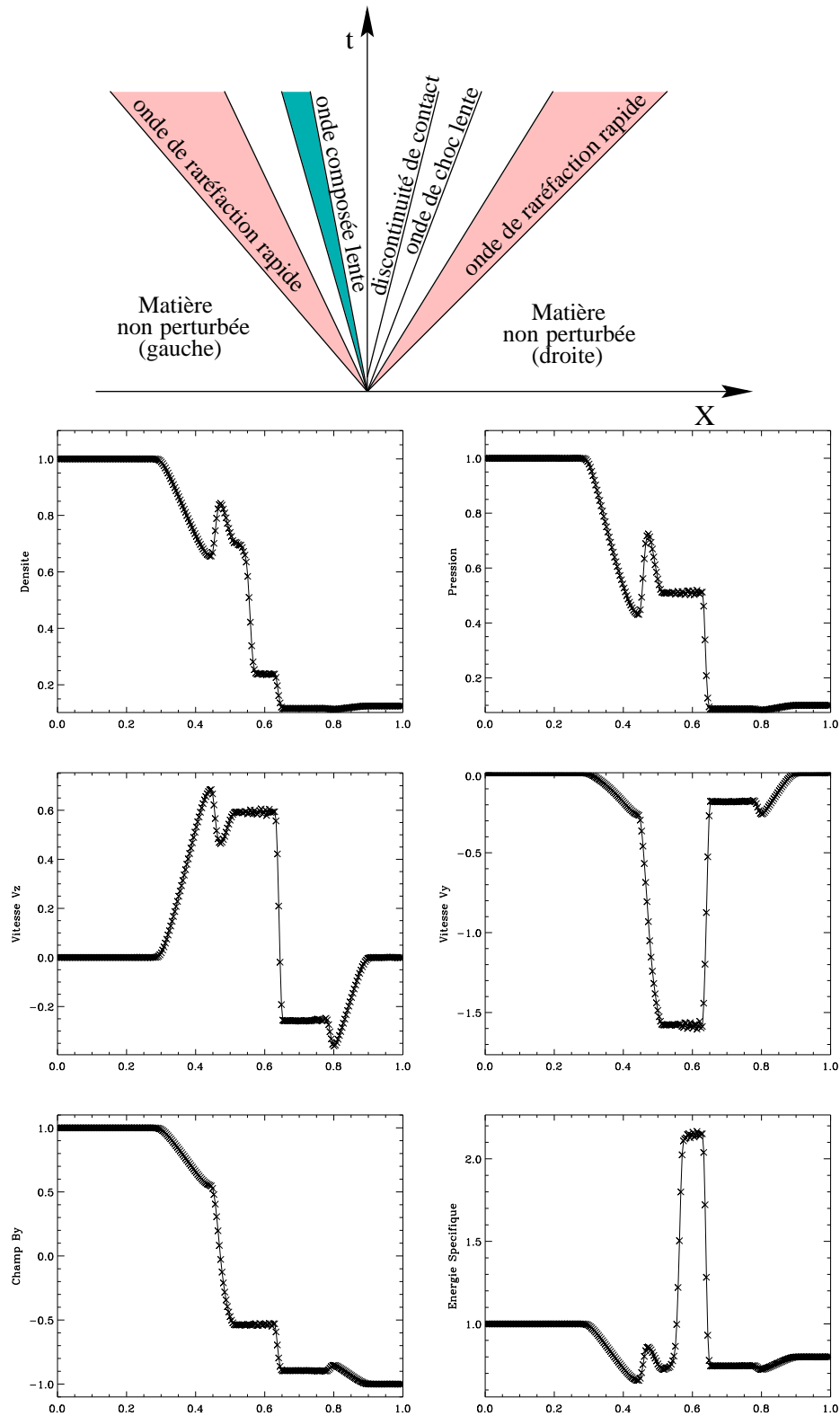
Développements Effectués

- Géométrie :
 - Passage en 3D et optimisation (Fortran 90)
 - Cartésien
 - Shearing Sheet \Rightarrow simulation d'une portion de disque en rotation différentielle
- Algorithme : Parallélisation du code (décomposition en domaines et librairie MPI)
- Intégration en temps : prédicteur/correcteur de Hyman à pas de temps variable (Hyman, 1979)
- Conditions aux limites : symétriques (miroir) et antisymétriques (absorbantes)
- dissipation artificielle :
 - Capture de chocs : limite la formation de fronts de chocs
 - Hyperviscosité : sélection des petites échelles

Tube de Riemann HD

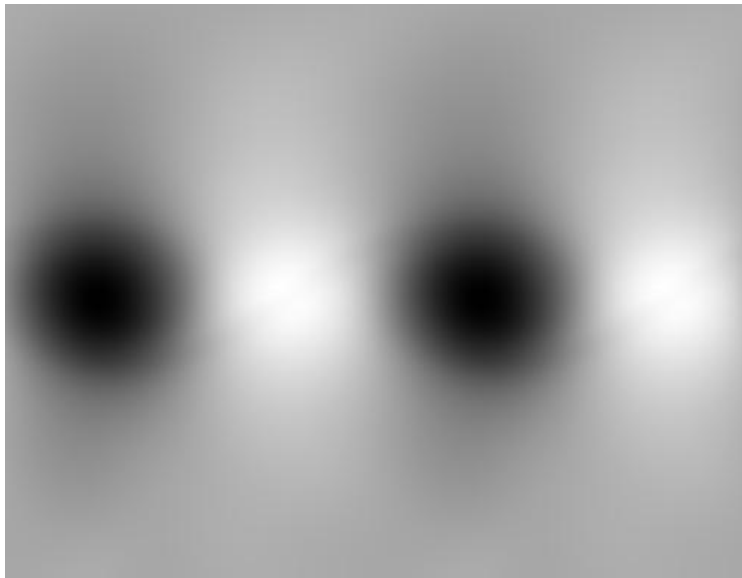


Tube de Riemann MHD



Kelvin-Helmholtz 2D - Champ Magnétique Perpendiculaire

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
32	16	128	32	1	1.2	1	1	0	1



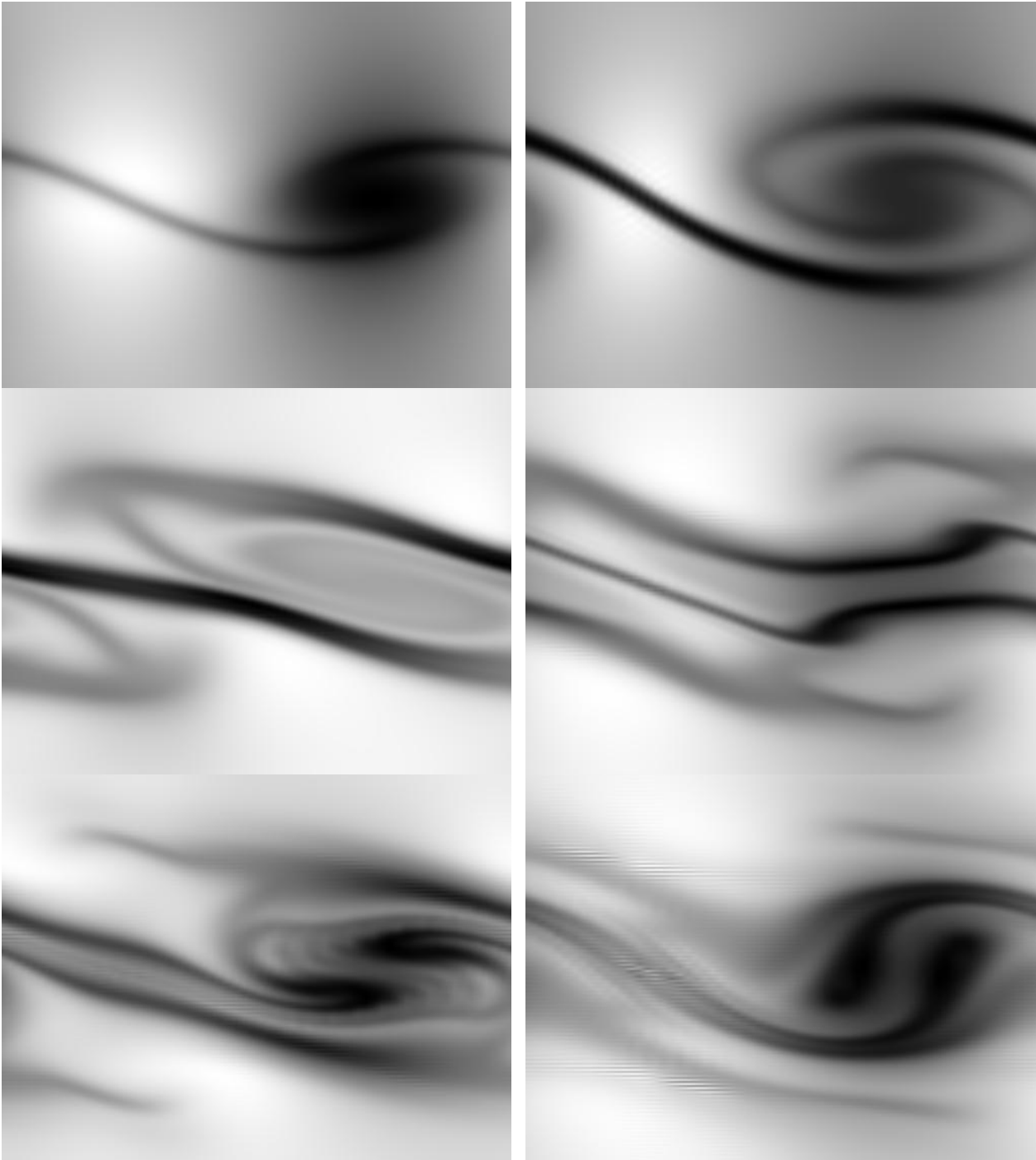
Densité



Vorticité

Kelvin-Helmholtz - Retournement de \tilde{B}

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
64	16	256	32	1	1.2	1	0	0.1	100



Conclusion

- Travaux sur des points importants de la MHD numérique
 - Développements techniques lourds
- ↪ Différentes version d'un code MHD 3D
- ↪ Physique correcte
- ↪ Choix des algorithmes \Rightarrow simulations souhaitées inaccessibles

Conclusion et Perspectives

- Nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités de pression
- Expérience acquise en MHD numérique

Finalité de ces travaux :

- ⇒ Gradient critique \rightsquigarrow avalanche \rightsquigarrow \vec{B} déstructuré \rightsquigarrow reconstruction par rotation
Génération de nodosités?
- ⇒ **Ballooning**
 - Région de lancement des jets
 - Turbulence dans les disques et éjection sporadique : problème résistif global
 - Évacuation du flux magnétique dans l'effondrement des nuages moléculaires
- ⇒ Études numériques du problème des instabilités de pression dans les jets et disques